Dossier n°58 : Exemples d'emploi de suites pour l'approximation d'un nombre.

Rédigé par Cécile COURTOIS, le 18 octobre 2003
cecile-courtois@wanadoo.fr

I Situation par rapport aux programmes.

Les suites sont étudiées à partir de la classe de première S avec, entre autres, les suites arithmétiques et géométriques et la monotonie des suites.

En terminale S, ces notions sont reprises et approfondies. On introduit la convergence des suites.

Je choisis donc de situer ce dossier en Terminale S.

II Commentaires généraux.

L'objectif de ce dossier est d'approcher un nombre réel à l'aide de suites, d'étudier la rapidité de convergence de ces suites et de donner une valeur approchée à 10^{-p} près de ce nombre avec $p \in$ IN.

Il convient bien sur de choisir un nombre non trivial.

J'ai choisi pour ce dossier l'approximation du nombre d'or ϕ égal à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ à 10^{-8} près par deux suites.

J'introduirai pour cela de nombre d'or comme unique solution positive de l'équation $x^2 - x - 1$.

Remarquons dès à présent que ϕ est un irrationnel.

Les deux suites seront construites par deux méthodes : la méthode du point fixe et la méthode de Newton (encore appelée méthode des tangentes).

Méthode du point fixe :

On introduit une fonction g telle que ϕ soit un point fixe de g.

On sait alors (mais cette connaissance n'est pas exigible des élèves) que si on parvient à construire une suite récurrente définie par $u_0 \in$ IR et $u_{n+1} = g(u_n)$ convergente alors sa limite sera l'unique point fixe de g, c'est à dire ϕ.

On étudie donc la suite récurrente définie par g avec un premier terme u_0 bien choisi.

La fonction g étant contractante, il existe un réel $k \in]0 ;1[$ tel que $|u_{n+1} - \phi| < |u_n - \phi|$.

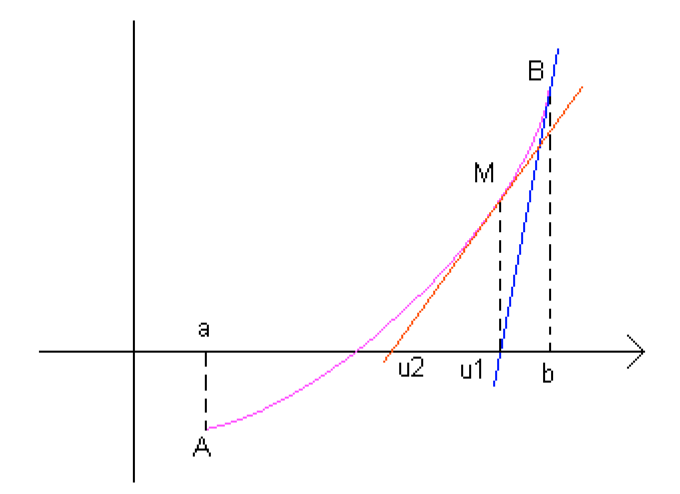
On en déduit la convergence de $(u_n)_n$ vers ϕ.

Méthode de Newton :

Cette méthode est également basée sur la convergence des suites récurrentes.

Elle consiste à construire une suite récurrente $(v_n)_n$ définie par $v_0 = b$ et pour tout $n \in$ IN, $v_{n+1} = T(v_n)$ où $T : x \to -\frac{f(x)}{f'(x)} + x$ et $f : x \to x^2-x-1$.

La construction de cette suite est issue de celle des tangentes à la courbe C de f : l'abscisse du point d'intersection de la tangente à C en un point M(x ;f(x)) où $x \in [a :b]$ est T(x).



On peut alors montrer que ϕ est l'unique point fixe de T sur [a ;b] et réaliser une étude similaire à celle de g, mis à part qu'on n'utilise pas le fait que T soit contractante.

Les deux méthodes utiliseront le principe de récurrence, étudié en Terminale S que je vous rappelle.

Principe de récurrence :

Pour montrer qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier $n \geq m$ (m donné) par récurrence, on procède en trois étapes :

- ***première étape*** : on vérifie que P_m est vraie ;
- ***deuxième étape*** : on suppose que pour un entier naturel $n \geq m$ quelconque donné, la proposition P_n est vraie et on démontre que la proposition P_{n+1} est vraie ;
- ***conclusion*** : lorsque ces deux étapes sont franchies, on conclut que la proposition P_n est vraie pour tout entier $n \geq m$.

III Présentation de l'exercice.

III.1 Préliminaires

On résout d'abord l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ dans IR. Les solutions sont $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On note ϕ la solution positive et on montre que $\phi \in \left[\frac{1}{2};2\right]$.

A l'aide d'un balayage à la calculatrice, on restreint notre intervalle d'étude à $I = \left[\frac{3}{2};2\right]$.

Outils :

- *Proposition 1 :*

Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solutions dans IR.
- Si $\Delta = 0$, l'équation a une unique solution $-\frac{b}{2a}$ dans IR.

- Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions dans IR : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

- Technique du balayage

III.2 Approximation par la méthode du point fixe.

On définit f : $\left[\frac{3}{2};2\right] \to$ IR.
$x \to x^2 - x - 1$.

Soit g : $\left[\frac{3}{2};2\right] \to$ IR.
$x \to \sqrt{1+x}$.

On vérifie alors aisément que ϕ est l'unique point fixe de g.
L'étude de g nous permet de montrer qu'elle laisse stable I et qu'elle est contractante :
$\forall x \in I, \ |g'(x)| \leq \frac{1}{3}$

La décroissance de $(u_n)_n$ et sa minoration par ϕ nous permettent de montrer que $(u_n)_n$ est convergente.

On déduit de l'inégalité de la moyenne appliquée à g' que, pour tout n $\in$ IN, $|u_n - \phi| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Pour $n_1 = 17$, on obtient une valeur approchée à 10^{-8} près de ϕ :
$u_{17} \approx 1,6180339912616$

Outils :

- *Théorème 2 :*

Toute suite décroissante et minorée est convergente.

- *Inégalité de la moyenne :*

Si f est continue sur [a ;b] (avec $a \leq b$) et si pour tout x $\in$ [a ;b] $|f(x)| \leq M$ alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M(b-a)$

III.3 Approximation par la méthode de Newton.

On approche ϕ à l'aide de la suite $(v_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ \forall n \in IN, v_{n+1} = T(v_n) \end{cases}$$

où T : $x \to -\frac{f(x)}{f'(x)} + x$.

Alors, f(x) = 0 $\Leftrightarrow$ T(x) = x.

On montre que, $\forall x \in I$, $T(x) = \frac{x^2+1}{2x-1}$.

Via la décroissance de $(v_n)_n$ et sa minoration par ϕ, $(v_n)_n$ est convergente.

Après un jeu d'écritures, on montre que pour tout n $\in$ IN, $0 \leq v_{n+1} - \phi \leq \frac{1}{2}(v_n - \phi)^2$ et par suite que pour tout n $\in$ IN, $0 \leq v_n - \phi \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+2^2+...+2^n}$.

On a donc une convergence quadratique.
Pour $n_2 = 4$, on obtient une valeur approchée à 10^{-8} pès de ϕ :
$v_4 \approx 1,61803398875$

IV Enoncé l'exercice (n°88 p 39, Terracher $T^{ale}S$ 2002).

0) Préliminaires.

1. Résoudre dans IR l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. La solution positive est notée ϕ. Montrer que $\phi \in \left[\frac{1}{2};2\right]$.

2. A l'aide d'un balayage à la calculatrice, montrer que $\phi \in \left[\frac{3}{2};2\right]$.

I) Approximation par la méthode du point fixe.

Soit f : $\left[\frac{3}{2};2\right] \to$ IR. Soit g : $\left[\frac{3}{2};2\right] \to$ IR.

$x \to x^2 - x - 1$. $x \to \sqrt{1+x}$.

1. Montrer que l'équation f(x) = 0 est équivalente à g(x) = x. En déduire que ϕ est l'unique point fixe de g sur $\left[\frac{3}{2};2\right]$.

2. Etudier les variations de g sur I = $\left[\frac{3}{2};2\right]$ et en déduire que pour tout $x \in$ I, $g(x) \in$ I.

3. Soit $(u_n)_{n \in IN}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in$ IN, $u_{n+1} = g(u_n)$. Montrer que, pour tout $n \in$ IN :

(i) $u_n \in$ I ;

(ii) $\phi \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$.

En déduire que $(u_n)_n$ est convergente.

4. Montrer que, pour tout $x \in$ I, $|g'(x)| \leq \frac{1}{3}$. En déduire que, pour tout $n \in$ IN, $0 \leq u_{n+1} - \phi \leq \frac{1}{3}(u_n - \phi)$ puis que, pour tout $n \in$ IN, $0 \leq u_{n+1} - \phi \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Quelle est la limite de $(u_n)_n$?

5. Déterminer un entier n_1 tel que, pour tout entier $n \geq n_1$, $|u_n - \phi| \leq 10^{-8}$. En déduire une valeur approchée de ϕ à 10^{-8} près.

II) Approximation par la méthode de Newton.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f, A le point de coordonnées $\left(\frac{3}{2};f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$ et B le point de coordonnées (2 ;f(2)).

1. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la tangente en B à la courbe $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

2. Soit T : $\left[\frac{3}{2};2\right] \to$ IR. Calculer T(2). Que constate-t-on ?

   $x \to -\frac{f(x)}{f'(x)} + x$

3. Soit M(x ;f(x) avec $x \in$ I. Montrer que T(x) est l'abscisse du point d'intersection de la tangente en M à $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

4. Soit $(v_n)_n$ la suite définie par $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = T(v_n)$ pour tout $n \in$ IN. Construire v_1, v_2 et v_3 sur le graphique et montrer que pour tout $n \in$ IN, $v_{n+1} = \frac{v_n^2 + 1}{2v_n - 1}$.

5. Montrer que f(x) = 0 équivaut à T(x) = x.

6. Etudier les variations de T sur I et montrer que pour tout $x \in$ I, $T(x) \in$ I. En déduire que pour tout $n \in$ IN, $v_n \in$ I.

7. Montrer que pour tout $n \in IN$, $\phi \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 2$ et prouver que $(v_n)_n$ est convergente.

8. Montrer que, pour tout $n \in IN$, $v_{n+1} - \phi = \dfrac{(v_n - \phi)^2}{2v_n - 1}$ et en déduire que, pour tout $n \in IN$, $0 \leq v_{n+1} - \phi \leq \dfrac{1}{2}(v_n - \phi)^2$.

9. Montrer que, pour tout $n \in IN$, $0 \leq v_n - \phi \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1+2+2^2+...+2^n}$. En déduire la limite de $(v_n)_n$.

10. Déterminer un entier n_2 tel que pour tout entier $n \geq n_2$, $|v_n - \phi| \leq 10^{-8}$. En déduire une valeur approchée à 10^{-8} près de ϕ.